第 2 节 常规的数列求和方法（★★★）

内容提要

求数列的前 n 项和是常考的题型，除了基本公式外，还需掌握以下几种求和方法.

1．错位相减法：适用于“等差$_{\times}$等比”这类数列求前 n 项和，详细求解过程请参考本节例 1.

2．裂项相消法：将 a_n 拆分成 b_n-b_{n+1} 或 b_n-b_{n+2}，相加时能抵消一些项，达到求和的目的.

①常规裂项：设 $\{a_n\}$ 是公差为 $d(d\neq 0)$ 的等差数列，且 $a_n\neq 0$，则 $\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$ 可拆分成 $\dfrac{1}{d}(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}})$，$\dfrac{1}{a_na_{n+2}}$ 可拆分成 $\dfrac{1}{2d}(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+2}})$．例如，$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$ 等.

②非常规裂项：有的裂项更复杂，但本质仍是将 a_n 拆分成 b_n-b_{n+1}，这类问题完成裂项的关键是寻找原有通项中局部的前后项关系．例如，$\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，$\dfrac{n+2}{n(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\dfrac{1}{n\cdot 2^n}-\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ 等.

3．分组求和法：常见的分组求和方法有两类.

①分别求和再相加：设 $a_n=b_n\pm c_n$，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 的前 n 项和分别为 B_n 和 C_n，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $A_n=B_n\pm C_n$.

②项数分组再相加：将 $\{a_n\}$ 中的项按一定的规则分组，有明显规律，则可按项数分组再求和.

4．倒序相加法：若发现关于中间对称的两项相加好算，则可倒序再写一遍和式，与原和式相加.

典型例题

类型Ⅰ：错位相减法求前 n 项和

【例 1】（1）设 $a_n=n\cdot 2^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

（2）设 $b_n=\dfrac{n}{2^n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）（$\{a_n\}$ 是由等差数列 $\{n\}$ 和等比数列 $\{2^n\}$ 相乘构成，可用错位相减法求和，先写出 S_n）

由题意，$S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$ ①，

（接下来在式①的两端同乘以等比数列的公比 2，达到错位的目的）

所以 $2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$ ②，

（为方便观察，把①②写成错位形式，$\begin{cases}S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n & ①\\ 2S_n=\qquad 1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1} & ②\end{cases}$，这样接下来两式相减的结果就容易看出来了）

①－②得：$-S_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$，

所以$S_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

（2）（本题可以把$\dfrac{n}{2^n}$变形成$n\cdot(\dfrac{1}{2})^n$，再两端乘以等比数列的公比$\dfrac{1}{2}$来错位；但像$\dfrac{n}{2^n}$这种分式结构，也可在和式两端同乘以分母2^n的公比 2 来错位，相减时计算量会稍小）

由题意，$\begin{cases}T_n=\quad\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}\ ① \\ 2T_n=1+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}+\dfrac{n}{2^{n-1}}\ ②\end{cases}$，

②－①可得：$T_n=1+\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{2}{2^n}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

【反思】①“等差×等比”这类数列可用错位相减法求和，像$\dfrac{n}{2^n}$这种分式结构，写出求和式子后，两端同乘以$\dfrac{1}{2}$或 2 都能错位，但采用同乘以 2 来错位，计算量稍小一些；②错位相减计算量大，可代$n=1$来检验计算结果是否正确，例如本题第（1）问，算得的S_n必须满足$S_1=a_1$，经检验，$S_1=2=a_1$，是满足的，检验的过程在草稿纸上完成即可，不作为正式作答的步骤.

【变式】（2021 • 天津卷（改））设$a_n=\sqrt{\dfrac{4n^2-1}{2\times 4^n}}$，数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，证明：$S_n<2\sqrt{2}$.

证明：（数列$\{a_n\}$无法直接求前 n 项和，故考虑放缩成能求和的结构，再证不等式，观察发现只需把根号内分子的-1丢掉，就可以开根号，凑成“等差×等比”的结构，用错位相减法求和）

因为$a_n=\sqrt{\dfrac{4n^2-1}{2\times 4^n}}<\sqrt{\dfrac{4n^2}{2\times 4^n}}=\dfrac{\sqrt{2}n}{2^n}$，所以$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n<\sqrt{2}(\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n})$ ①，

（式①的括号内即为$\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$的前 n 项和，这部分在例 1 第（2）问已经求过，故下面直接给出）

设$T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$，则由例 1 第（2）问的结果知$T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$，

代入①得：$S_n<\sqrt{2}(2-\dfrac{n+2}{2^n})=2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}(n+2)}{2^n}$，因为$\dfrac{\sqrt{2}(n+2)}{2^n}>0$，所以$S_n<2\sqrt{2}$.

【总结】形如“等差数列×等比数列”的数列求和问题，用错位相减法求解；有的类似于“等差×等比”但无法求和的数列，可考虑通过放缩成严格的“等差×等比”结构，再用错位相减法求和.

类型Ⅱ：裂项相消法求前 n 项和

【例 2】在数列$\{a_n\}$中，$a_n=a_{n-1}+2(n\ge 2)$，$a_1=1$，则数列$\left\{\dfrac{2}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 n 项和$S_n=$______.

解析： $a_n=a_{n-1}+2\Rightarrow$数列$\{a_n\}$是公差$d=2$的等差数列，结合$a_1=1$可得$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$，

注意到$\dfrac{2}{a_na_{n+1}}$中的a_n和a_{n+1}是$\{a_n\}$的相邻项，这种情况常用裂项求和，故将其拆成两项之差，

所以$\dfrac{2}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$，

故$S_n=(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7})+\cdots+(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1})+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})=1-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$.

答案： $\dfrac{2n}{2n+1}$

【变式】已知正项数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n$，令$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+2}}$，数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$\dfrac{1}{3}\le T_n<\dfrac{3}{4}$.

解： 由题意，$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+2}}=\dfrac{1}{n(n+2)}$，（分母的$n$和$n+2$是隔项关系，这种情况也可用裂项相消法求和，可先将其拆分成$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}$，但此时通分可得$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{2}{n(n+2)}$，乘以$\dfrac{1}{2}$可调整为$\dfrac{1}{n(n+2)}$）

所以$b_n=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$，故$T_n=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$，

（此时若看不出抵消后剩哪些项，可先将整个式子调整顺序，按符号进行分组）

$T_n=\dfrac{1}{2}[(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n})-(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2})]$，（观察发现能抵消的部分是$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}$）

所以$T_n=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2})$，因为$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2})>0$，所以$T_n<\dfrac{3}{4}$；

另一方面，$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2})$随着$n$的增大而减小，所以当$n=1$时，$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2})$最大，$T_n$最小，

故$T_n\ge\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{3}$；所以$\dfrac{1}{3}\le T_n<\dfrac{3}{4}$.

【反思】裂项相消公式不用全部记住，使用时可以先尝试拆分为两项，再补系数.

【例3】已知$a_n=\dfrac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$，则数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n=$______.

解析： 注意到分母的2^n-1和$2^{n+1}-1$分别是数列$\{2^n-1\}$的第n项和第$n+1$项，属前后项关系，故可考虑裂项，先拆成$\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，此时通分会发现结果为$\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$，乘以2即得$a_n$，

由题意，$a_n=\dfrac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=2(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})$，

所以

$$S_n=2(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\frac{1}{2^3-1}-\frac{1}{2^4-1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}-1}-\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})=2(1-\frac{1}{2^{n+1}-1}).$$

答案：$2(1-\frac{1}{2^{n+1}-1})$

【反思】对于较复杂的裂项，关键是观察出通项中具有前后项关系的结构，如本题的2^n-1和$2^{n+1}-1$.

【例 4】已知$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=$______.

解析：分母的$\sqrt{n}$和$\sqrt{n+1}$是$\{\sqrt{n}\}$的第 n 项和第 $n+1$ 项，故考虑裂项，分母有理化即可裂项，

由题意，$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$，

所以$S_n=-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\cdots-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}=-\sqrt{1}+\sqrt{n+1}=\sqrt{n+1}-1$.

答案：$\sqrt{n+1}-1$

【例 5】已知$a_n=\frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}}$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=$______.

解析：分母的 n 和 $n+1$ 属前后项，考虑裂项，但还有一个2^{n+1}，它可与2^n形成前后项的关系，于是分子分母同乘以2^n，得到$\frac{(n+2)\cdot 2^n}{n\cdot 2^n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}}$，此时分母的$n\cdot 2^n$和$(n+1)\cdot 2^{n+1}$就是前后项的关系了，裂项即可，

由题意，$a_n=\frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}}=\frac{(n+2)\cdot 2^n}{n\cdot 2^n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$，所以

$$S_n=\frac{1}{1\times 2^1}-\frac{1}{2\times 2^2}+\frac{1}{2\times 2^2}-\frac{1}{3\times 2^3}+\frac{1}{3\times 2^3}-\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{n\cdot 2^n}+\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}.$$

答案：$\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$

【反思】对于没有前后项关系的部分，也可考虑从结构特征出发，通过配凑，产生前后项关系.

【总结】从例 2 到例 5 可以看出，裂项的本质是把通项a_n拆分成另一个数列$\{b_n\}$的前后项之差b_n-b_{n+1}或隔项差b_n-b_{n+2}，进而求和时能相互抵消一部分. 考题中最常见的是例 2 的等差数列衍生型，其它裂项尽管形式更复杂，但本质和例 2 的相同.

类型III：分组求和法求前 n 项和

【例 6】已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n-\frac{1}{n(n+2)}$，求$\{a_n\}$的前 n 项和S_n.

解：（由于2^n和$\frac{1}{n(n+2)}$均能求和，故分别求和，再相减，即可得到$\{a_n\}$的前 n 项和S_n）

由题意，$a_n=2^n-\frac{1}{n(n+2)}=2^n-\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，

所以$S_n=2^1-\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})+2^2-\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+2^3-\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+2^n-\frac{1}{2}\times(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$

$=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=2^{n+1}-2-\frac{1}{2}[\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}]=2^{n+1}-\frac{11}{4}+\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

【例 7】设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(-1)^n(2n-1)\cos\frac{n\pi}{2}-1$，其前 n 项和为S_n，则$S_{2024}=$______.

解析： a_n由$(-1)^n(2n-1)\cos\frac{n\pi}{2}$和$-1$两部分组成，可分别求和再相加，

设$b_n=(-1)^n(2n-1)\cos\frac{n\pi}{2}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为T_n，则$a_n=b_n-1$，

所以$S_{2024}=a_1+a_2+\cdots+a_{2024}=b_1-1+b_2-1+\cdots+b_{2024}-1=(b_1+b_2+\cdots+b_{2024})-2024=T_{2024}-2024$ ①，

直接求T_{2024}不易，可先列出$\{b_n\}$的前几项找规律，依次为 0，-3，0，7，0，-11，0，15，…，猜想若按四项一组来分组，则每组的和均为 4，可通过计算$b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}(k\in\mathbf{N}^*)$来验证猜想，

设$c_k=b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}(k\in\mathbf{N}^*)$，注意到当 n 为奇数时，$\cos\frac{n\pi}{2}=0$，所以$b_{4k-3}=b_{4k-1}=0$，

而$b_{4k-2}=(-1)^{4k-2}[2(4k-2)-1]\cos(2k-1)\pi=(8k-5)\cos(-\pi)=5-8k$，

$b_{4k}=(-1)^{4k}(2\times4k-1)\cos2k\pi=8k-1$，所以$c_k=b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}=5-8k+8k-1=4$，

故$T_{2024}=(b_1+b_2+b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7+b_8)+\cdots+(b_{2021}+b_{2022}+b_{2023}+b_{2024})$

$=c_1+c_2+\cdots+c_{506}=4\times506=2024$，代入式①可得$S_{2024}=0$.

答案： 0

【例 8】S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且$a_1=1$，$S_7=28$，记$b_n=[\lg a_n]$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数，如$[0.9]=0$，$[\lg 99]=1$.

（1）求b_1，b_{11}，b_{101}；

（2）求数列$\{b_n\}$的前 1000 项和.

解：（1）设$\{a_n\}$的公差为 d，由题意，$S_7=7a_1+21d=28$，结合$a_1=1$可得$d=1$，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=n$，从而$b_n=[\lg n]$，故$b_1=[\lg1]=0$，$b_{11}=[\lg11]=1$，$b_{101}=[\lg101]=2$.

（2）由（1）知$b_n=[\lg a_n]=[\lg n]$，（要对$\{b_n\}$求和，先分析b_n的取值规律，底数为 10，可按10^k分组）

当$1\le n\le9$时，$0\le\lg n<1$，所以$b_n=0$；当$10\le n\le99$时，$1\le\lg n<2$，所以$b_n=1$；

当$100\le n\le999$时，$2\le\lg n<3$，所以$b_n=2$；当$n=1000$时，$\lg n=\lg1000=3$，所以$b_{1000}=3$；

（将$\{b_n\}$中的项按取值的不同进行分组，可以求出前 1000 项和）

故$b_1+b_2+\cdots+b_{1000}=(b_1+\cdots+b_9)+(b_{10}+\cdots+b_{99})+(b_{100}+\cdots+b_{999})+b_{1000}=0\times9+1\times90+2\times900+3=1893$.

【总结】 若$a_n=b_n+c_n$，可对数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$分别求和再相加；若数列$\{a_n\}$不易直接求和，但将它的项进行适当的分组，有明显的规律，则可按项数分组来求和，如例 7 和例 8.

类型Ⅳ：倒序相加法求和

【例 9】已知函数 $f(x)=x+3\sin(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\frac{n}{2024}$，则 $f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2023})=$______.

解析：由题意，$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2023})=f(\frac{1}{2024})+f(\frac{2}{2024})+\cdots+f(\frac{2023}{2024})$ ①，

式①中每项都不易代入解析式计算，故应考虑组合计算，注意到 $\frac{1}{2024}+\frac{2023}{2024}=\frac{2}{2024}+\frac{2022}{2024}=\cdots=1$，所以不妨看看当两个自变量之和为 1 时，它们的函数值之和有无规律，于是先计算 $f(x)+f(1-x)$，

由题意，$f(x)+f(1-x)=x+3\sin(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}+(1-x)+3\sin[(1-x)-\frac{1}{2}]+\frac{1}{2}$

$=2+3\sin(x-\frac{1}{2})+3\sin(\frac{1}{2}-x)=2+3\sin(x-\frac{1}{2})-3\sin(x-\frac{1}{2})=2$，

确实有规律，故求和时两两组合，把自变量凑成和为 1 的结构，为了便于观察，我们采用倒序相加法，

记 $S=f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2023})$ ②，则 $S=f(a_{2023})+f(a_{2022})+\cdots+f(a_1)$ ③，

②＋③可得：$2S=[f(a_1)+f(a_{2023})]+[f(a_2)+f(a_{2022})]+\cdots+[f(a_{2023})+f(a_1)]$ ④，

由题意，$a_1+a_{2023}=a_2+a_{2022}=\cdots=a_{2023}+a_1=1$，所以

$f(a_1)+f(a_{2023})=f(a_2)+f(a_{2022})=\cdots=f(a_{2023})+f(a_1)=2$，

代入④可得 $2S=2\times 2023$，所以 $S=2023$.

答案：2023

【总结】在求和时，若需要将关于中间对称的两项组合，则可采用倒序相加法.

强化训练

类型Ⅰ：错位相减与裂项相消

1.（★★）设 $a_n=(2n-1)\cdot 3^n$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

2.（2023•辽宁模拟•★★）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q\neq 1$，且 $a_1=2$，$2a_1+a_3=3a_2$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求数列 $\{\frac{n}{S_n+2}\}$ 的前 n 项和 T_n，证明：$T_n<1$.

3.(★★★)在各项均为正数的等差数列$\{a_n\}$中，a_1，a_2，a_6构成公比不为1的等比数列，S_n是数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和.

（1）若$a_1=\dfrac{1}{3}$，设$b_n=a_n+\dfrac{2}{3}$，求数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$；

（2）若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>\dfrac{1}{a_1}$，证明：$a_1<\dfrac{1}{3}$.

4.（★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，并求$a_n$；

（2）若$b_n=4a_na_{n+2}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n

5.（2023 • 兰州模拟 • ★★★）已知等差数列$\{a_n\}$为递增数列，其前n项和为S_n，$S_6=36$，且a_1，a_2，a_5成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，若$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，且存在$n\in\mathbf{N}^*$，使得$T_n-\lambda a_{n+1}\geq 0$成立，求实数$\lambda$的取值范围.

6.（2022 • 山西模拟 • ★★★）已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=2$，$a_na_{n+2}=2a_{n+1}^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\log_2 a_{n+1}$，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，求数列 $\{\lg S_n\}$ 的前 99 项和.

7.（2022 •深圳模拟 •★★★★）设首项为 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，且满足 $a_na_{n+1}=(n+1)a_n-na_{n+1}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设数列 $\left\{\dfrac{n}{T_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$\dfrac{1}{S_1}+\dfrac{1}{S_2}+\cdots+\dfrac{1}{S_n}<\dfrac{3}{4}$.

参考公式：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

类型Ⅱ：分组求和与倒序相加

8.（★★★）数列 1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，…，1，2，4，…，2^{n-1}，… 的前 60 项和 $S_{60}=$______.

.

9.（2023 • 辽宁沈阳模拟 • ★★★）已知函数 $f(x+\dfrac{1}{2})$ 为奇函数，且 $g(x)=f(x)+1$，若 $a_n=g(\dfrac{n}{2023})$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 2022 项和为______.

10.（2023 • 北京模拟 • ★★★）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=n\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 2023 项和为（　　）

（A）-2025　　（B）-2023　　（C）-2　　（D）0

11．（★★★）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$， $a_{n+1}=a_n^2(n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\log_2 a_n+\log_2(\log_2 a_n)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n．

12．（2022 • 西安模拟改 • ★★★）高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号. 设$x\in\mathbf{R}$，用$[x]$表示不超过 x 的最大整数，则 $f(x)=[x]$称为高斯函数. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$(n+1)a_{n+1}-na_n=2n+1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$b_n=[\lg a_n]$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求 T_{2022}.